Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - versão 2 - 05 de Janeiro de 2015 - 14h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja E o elipsóide definido pela equação $x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 = 4$.

[1.0] (a) Determine o espaço normal a E no ponto $(2, 0, 0)$.

[1.0] (b) Determine a recta normal a E no ponto $(2, 0, 0)$.

[2.0] 2. Determine os extremos de $f(x, y) = x$ na elipse $x^2 + 2xy + 2y^2 = 4$.

3. Sejam $u(x, y) = x^2 + y$ e $v(x, y) = xe^{xy}$, funções definidas em$\mathbb{R}^2$.

[2.0] (a) Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y) = (1, 0)$ onde a equação $v(x, y) = 1$ define y como uma função C^1 de x. Calcule $y^{'}(1)$.

[1.5] (b) Mostre que $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ é localmente invertível numa vizinhança de $(x, y) = (1, 0)$ e calcule $DF^{-1}(1, 1)$.

[1.5] (c) Calcule $\int_C u\, ds$ onde C é o segmento de recta representado pelo caminho

$$g(t) = (t, t + 1),\ t \in [0, 1].$$

4. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (-y, x + 1)$.

[1.0] (a) Calcule o trabalho realizado por F ao longo do segmento de recta entre o ponto $(-1, 0)$ e o ponto $(1, 0)$.

[2.0] (b) Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado por F ao longo da linha definida por $x^2 + y^2 = 1,\ y < 0$ no sentido anti-horário.

5. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (2 + x, -2y, z)$.

[1.0] (a) Calcule o fluxo do campo F através da superfície plana definida por $z = 0,\ x^2+y^2 < 1$, no sentido da normal com terceira componente positiva.

[2.0] (b) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo F através da superfície S definida por $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1,\ 0 < z < 1$, no sentido da normal com terceira componente negativa.

[2.0] 6. Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $H(x, y, z) = (-2y, 2x, z^4)$, através da superfície dada por $z = x^2+y^2-1,\ z < 0$, orientada com a normal com terceira componente positiva.

[3.0] 7. Seja F um campo vectorial fechado e definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Seja C a circunferência dada por $z = 0,\ x^2 + y^2 = 1$ e descrita uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$. Sabendo que $\oint_C F \cdot dg = 1$, calcule os valores possíveis do integral $\oint_L F \cdot dg$ em que L designa uma linha regular, simples e fechada sobre a superfície cilíndrica descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$.