Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - versão 1 - 05 de Janeiro de 2015 - 16h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja S a esfera definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$

[1.0] (a) Determine um vector normal a S no ponto $(0, 0, -1)$.

[1.0] (b) Determine o plano tangente a S no ponto $(0, 0, -1)$.

[2.0] 2. Determine os extremos de $f(x, y) = y + 1$ na circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

3. Sejam $u(x, y) = x^2 + y$ e $v(x, y) = xe^{xy}$, funções definidas em $\mathbb{R}^2$.

[2.0] (a) Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y) = (1, 0)$ onde a equação $v(x, y) = 1$ define x como uma função C^1 de y. Calcule $x'(0)$.

[1.5] (b) Mostre que $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ é localmente invertível numa vizinhança de $(x, y) = (1, 0)$ e calcule $DF^{-1}(1, 1)$.

[1.5] (c) Calcule $\displaystyle\int_C u\,ds$ onde C é o segmento de recta representado pelo caminho

$$g(t) = (t, t),\ \ t \in [0, 1].$$

4. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (1 - y, x)$.

[1.0] (a) Calcule o trabalho realizado por F ao longo do segmento de recta entre o ponto $(-1, 1)$ e o ponto $(1, 1)$.

[2.0] (b) Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado por F ao longo da linha definida por $y = |x|,\ -1 \le x \le 1$, no sentido à sua escolha.

5. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (x + z, x + y, -2z)$.

[1.0] (a) Calcule o fluxo do campo F através da superfície plana definida por $z = 0,\ x^2 + y^2 < 1$, no sentido da normal com terceira componente positiva.

[2.0] (b) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo F através da superfície S definida por $z = x^2 + y^2 - 1,\ 0 < z < 3$, no sentido da normal com terceira componente negativa.

[2.0] 6. Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $H(x, y, z) = (-y, x, z^2)$, através da superfície dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0$, orientada com a normal com terceira componente positiva.

[3.0] 7. Seja F um campo vectorial fechado e definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Seja C a circunferência dada por $z = 0,\ x^2 + y^2 = 1$ e descrita uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$. Sabendo que $\oint_C F \cdot dg = 1$, calcule os valores possíveis do integral $\oint_L F \cdot dg$ em que L designa uma linha regular, simples e fechada sobre a superfície cilíndrica descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$.