Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste - Versão 2A

14 de Janeiro 2012

Duração: 90 minutos

INSTRUÇÕES

- Preencha o nome, número de aluno, curso e sala abaixo.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos exceto na pergunta 3, que é de resposta múltipla.
- Este caderno de teste inclui duas folhas em branco no final, que poderá utilizar como rascunho ou para terminar outras respostas. Todo o caderno tem que ser entregue no final, pelo que não poderá rasgar ou arrancar essas folhas.
- Se necessitar de folhas de rascunho adicionais, deve solicitá-las ao docente da sala.

Pergunta	Cotação	Classificação
1.a)	2.5	
1.b)	3	
2.	3	
3	2.5	
4.a)	3	
4.b)	3	
5	3	

Nome ____

Número ____________________ **Sala** ______________

Curso ______________________ **Rubrica (DOCENTE):**

1. Considere o sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y \geq 0\,;\, x^2+y^2 \leq 1\,;\, x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$.

(2.5 val.) a) Obtenha uma expressão para o volume de V usando integrais triplos da forma $\int(\int(\int ...dx)dy)dz$.

(3 val.) b) Através de uma mudança de coordenadas apropriada calcule o momento de inércia de V relativo ao eixo Oz considerando uma densidade de massa $\kappa(x, y, z) = y$.

(3 val.) 2. Calcule a massa do fio definido pelas equações $25x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$ e $z = 4x$ com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4y^2}$.

3. Considere os seguintes campos vetoriais

$$F(x,y) = (3x^2+2x, 3y^2), \quad G(x,y) = \left(-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\right),$$

e as curvas

$$C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+1)^2+y^2 = 1\right\}, \quad C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+(y-1)^2 = 1\right\}$$
$$C_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 1-x^2, 0 < x < 1\right\}, \quad C_4 \text{ é a fronteira de } [-3,3] \times [-3,3].$$

Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

Nota Importante: Responda apenas verdadeiro ou falso para cada uma das alíneas. Nesta pergunta não há cotação para justificações ou cálculos, mas note que cada resposta errada será cotada com -**0.5** valores.

(0.5 val.) (a) $\oint_{C_4} G \cdot dg = 2\pi$, onde C_4 é percorrida no sentido anti-horário;

(0.5 val.) (b) $\int_{C_3} F \cdot dg = 1$, onde C_3 é percorrida no sentido crescente de x;

(0.5 val.) (c) $\oint_{C_2} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_2 é percorrida no sentido anti-horário;

(0.5 val.) (d) $\oint_{C_2} G \cdot dg = -2\pi$, onde C_2 é percorrida no sentido horário;

(0.5 val.) (e) $\oint_{C_1} G \cdot dg = -2\pi$, onde C_1 é percorrida no sentido horário;

4. Sejam $G = \operatorname{rot} F$ onde $F(x, y, z) = (y, 0, x)$ e

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2},\ 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

(3 val.) (a) Calcule pelo Teorema de Stokes o fluxo $\iint_S G \cdot n$, onde n é a normal unitária de S satisfazendo $n_z < 0$.

(3 val.) (b) Aplique o Teorema da Divergência para calcular $\iint_M G \cdot n$, onde

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\right\}$$

e n é a normal unitária que aponta para dentro de M.

(3 val.) 5. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ uma variedade-1. Dado um campo vetorial $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e um campo unitário $n\colon C \to \mathbb{R}^2$, normal a C (*i.e.*, $\forall_{(x,y)\in C}\ n(x,y) \in T^{\perp}_{(x,y)}C$ e $||n(x,y)|| = 1$), define-se $\int_C F \cdot n$ como o integral de linha do campo escalar $F \cdot n$.

Sejam $R \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular tal $C = \partial R$ é uma variedade-1 conexa, $n\colon C \to \mathbb{R}^2$ a normal exterior unitária de R, e $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Mostre que

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot n = 16(I_x + I_y),$$

onde C é percorrida no sentido anti-horário, e I_x, I_y são respetivamente os momentos de inércia de R em relação aos eixos Ox, Oy, supondo a densidade de massa constante igual a 1.

Sugestão: Aplique o Teorema de Green a um campo vetorial apropriado.

Rascunho I

Rascunho II