Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 12 de Junho de 2017 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 3, x + 2y + 2z = 5\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que B é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) (b) Determine um vector não nulo tangente a B no ponto $(1, 1, 1)$.

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(1, 1, 1)$, B pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe C^1, na forma $(y, z) = h(x)$. Determine $h'(1)$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de B onde a função $g(x, y, z) = 2x + 4y$ atinge os valores máximo e mínimo.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{4x}{2x^2 + y^4} + y, \frac{4y^3}{2x^2 + y^4} + x \right).$$

Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $\beta(t) = (t, 1 + t^2), t \in [0, 1]$.

3. Considere a superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 1 = \sqrt{y^2 + z^2}, -1 < x < 0\}.$$

(1 val.) (a) Calcule a área de A.

(3 val.) (b) Calcule o fluxo do campo $H(x, y, z) = (y^2 + z^2, 2e^x yz, 5 - z^2 e^x)$ através de A no sentido da normal unitária cuja primeira componente é negativa.

(3 val.) 4. Utilizando o Teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo

$$G(x, y, z) = (\operatorname{sen} z - yz, e^{y+z} + y^3, e^z \operatorname{sen} x)$$

ao longo da circunferência C dada pelas equações $x^2 + y^2 = 3$ e $z = 1$, percorrida no sentido horário quando vista por um observador colocado no ponto $(0, 0, 20)$.

(3 val.) 5. Sejam M e N variedades-2 compactas em $\mathbb{R}^3$ que não se intersectam. Mostre que se $p \in M, q \in N$ são pontos onde a distância entre M e N é mínima, então

$$(T_p M)^\perp = (T_q N)^\perp.$$