Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 12 de Junho de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC, MEBiom e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 10\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que B é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) (b) Determine os pontos de B em que o vector $(1, 1, 2)$ é normal a B.

(2 val.) (c) Mostre que, numa vizinhança aberta de $(3, 0, \frac{1}{2})$, B pode ser descrito pelo gráfico de uma função de classe C^1, na forma $x = h(y, z)$. Determine $\nabla h(0, \frac{1}{2})$.

(2 val.) (d) Determine os pontos de B onde a função $g(x, y, z) = 2x + 8z$ atinge os valores máximo e mínimo.

(3 val.) 2. Considere o campo vectorial
$$G(x, y) = \left(\frac{3y}{x^2 + y^2} - 2y, \frac{-3x}{x^2 + y^2} + 2x \right).$$
Seja E a elipse definida pela equação $3x^2 + 2y^2 = 1$. Calcule o trabalho de G ao longo de E percorrida no sentido anti-horário.

(1 val.) 3. Calcule a massa total do fio
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, z + x = 2\}$$
com densidade de massa por unidade de comprimento dada por $\sigma(x, y, z) = \dfrac{2}{\sqrt{1 + y^2}}$.

4. Considere a superfície
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + 1 = x^2 + z^2, -1 < y < 0\}.$$
orientada com a normal unitária n cuja segunda componente é positiva. Seja $F(x, y, z) = (x, -2y, z - 1)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$, usando:

(3 val.) (a) o Teorema da Divergência;

(3 val.) (b) o Teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ e $L \subset \mathbb{R}^n$ variedades de dimensão $\dim K = k$, $\dim L = l$, tal que $k + l > n$. Mostre que se
$$(T_p K)^\perp \cap (T_p L)^\perp = \{0\}, \quad \forall p \in K \cap L,$$
então $K \cap L$ é uma variedade e determine a sua dimensão.