Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - 9 de Junho de 2014 - das 9h00 às 10h30 - Versão 2

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + yz + z^2 = 4\}$.

[2 v] (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

[2,5 v] (b) Obtenha uma base do espaço tangente a M no ponto $(1, -1, -1)$.

[2 v] (c) Admitindo que a função f dada por $f(x, y, z) = y - z$ tem valor mínimo em M, calcule esse valor através do método dos multiplicadores de Lagrange.

[2 v] 2. Seja f a função dada pela expressão

$$f(x, y) = \left(e^{-x^2+y^2}, \frac{4}{xy-3}, \right).$$

Justifique que f não é injectiva no seu domínio. Mostre que, restrita a uma vizinhança do ponto $(1, 1)$, f tem inversa local g de classe C^1, e calcule $Dg(1, -2)$.

3. Considere o campo vectorial definido por $H(x, y, z) = (3yz, 3xz, 3xy - e^z)$.

[1,5 v] (a) Calcule um potencial escalar para o campo H.

[1 v] (b) Calcule o trabalho de H ao longo do caminho

$$\gamma(t) = (t, e^{t^2}, 2 - t), \text{ com } t \in [0, 2].$$

4. Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = 2 + x^2 + y^2 \, , \, z < 3\} \, ,$$
$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 1 \, , \, z = 3\} \, ,$$

e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (y, y - x, -z).$$

[2 v] (a) Calcule o trabalho de F ao longo de L, no sentido horário visto do ponto $(0, 0, 10)$.

[2 v] (b) Calcule o fluxo de F através de M no sentido da normal unitária com terceira componente negativa, usando o Teorema da Divergência.

[2 v] (c) Mostre que $F = \text{rot}(A)$, com $A(x, y, z) = (yz, -yz, \frac{1}{2}x^2)$, e determine o trabalho de A ao longo de L no sentido anti-horário visto do ponto $(0, 0, 10)$.

[3 v] 5. Seja $F : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, definida num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Seja $a \in D$ tal que $F(a) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Nestas condições, o teorema da função implícita implica que o conjunto dado por $F(x) = 0$ é o gráfico de uma função $f : S \to \mathbb{R}$, onde $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$, com f de classe C^1, numa vizinhança do ponto a. Mostre que, sendo F de classe C^2, então f é de classe C^2. Obtenha uma expressão para a entrada ij da matriz Hessiana de f no ponto $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ em termos das derivadas de F no ponto a.