Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - 9 de Junho de 2014 - das 11h30 às 13h00 - Versão 2

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 - yz + z^2 = 2\}$.

[2 v] (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

[2,5 v] (b) Obtenha uma base do espaço tangente a M no ponto $(1, -1, -1)$.

[2 v] (c) Admitindo que a função f dada por $f(x, y, z) = y + z$ tem valor mínimo em M, calcule esse valor através do método dos multiplicadores de Lagrange.

[2 v] 2. Mostre que o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{yz - 3} & = & -3 \\ e^{-x^2+z^2} & = & 1 \end{cases}$$

determina x e z em função de y, $(x, z) = f(y)$, com $f \in C^1$, numa vizinhança do ponto $(-1, 1, 1)$. Calcule $Df(1)$.

3. Considere o campo vectorial definido por $H(x, y, z) = (2xz, -z^2, x^2 - 2yz)$.

[1,5 v] (a) Calcule um potencial escalar para o campo H.

[1 v] (b) Calcule o trabalho de H ao longo do caminho $\gamma(t) = (t^2, t\,\text{sen}(\pi+t), \cos(\pi+t))$, com $t \in [0, \pi]$.

4. Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \, , \; 0 < z < 2\} \, ,$$
$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 9 \, , \; z = 0\}$$

e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (x - y(z - 2), y + x(z - 2), 2 - 2z) \; .$$

[2 v] (a) Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal unitária n com terceira componente positiva.

[2 v] (b) Calcule o trabalho de F ao longo de L percorrido uma vez no sentido anti-horário quando visto de $(0, 0, 10)$, usando a definição.

[2 v] (c) Calcule o fluxo de $\text{rot}(F)$ através de S no sentido da normal unitária n com terceira componente negativa.

[3 v] 5. Seja $f : D \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1, definida num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, com matriz derivada

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha(x, y) & \beta(x, y) \\ \gamma(x, y) & \delta(x, y) \end{bmatrix}.$$

Seja $(a, b) \in D$ tal que $\det Df(a, b) \neq 0$. Nestas condições, o teorema da função inversa implica que f admite uma inversa $g(u, v)$ de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(u, v) = (c, d) = f(a, b)$. Mostre que, sendo f de classe C^2, então g é de classe C^2. Supondo que $\det Df(x, y) = 1$ (constante), obtenha uma expressão para $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ no ponto (c, d), em termos dos valores das funções α, β, γ, δ e das suas derivadas no ponto (a, b).