

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 9 de Janeiro de 2017 - 16h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que a equação $xe^{(x+y)z} = 2$, em \mathbb{R}^3 , define x como função de y e z , ou seja, $x = g(y, z)$, de classe C^1 , numa vizinhança do ponto $(2, 0, 0)$. Calcule $\nabla g(0, 0)$.

2. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; x + y + z^2 = 1\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(0, 1, 0)$.

(2 val.) (c) Determine os pontos de M com menor coordenada y .

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$f(x, y) = \left(\frac{-2y}{x^2 + y^2}, \frac{2x}{x^2 + y^2} \right).$$

Seja E a elipse definida pela equação $2x^2 + 4y^2 = 1$. Calcule o trabalho de f ao longo de E , percorrida no sentido horário.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}; z \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Calcule a área de S .

(3 val.) (b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x, y, z) = (e^{y+z}, yz + x, 3 - z^2/2)$$

através de S no sentido da normal n tal que $n_z > 0$.

(2 val.) (c) Considere o campo $A(x, y, z) = (-y\beta(z), x\beta(z), z^4e^y)$, e a função β de classe C^1 tal que $\beta(0) = 3$.

Calcule o fluxo de $\text{rot } A$ através de S no sentido da normal n da alínea anterior, usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função implícita usando o teorema da função inversa.