Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 9 de Janeiro de 2017 - 16h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que a equação $ze^{x(y+z)} = 2$, em $\mathbb{R}^3$, define z como função de x e y, ou seja, $z = f(x, y)$, de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(0, 0, 2)$. Calcule $\nabla f(0, 0)$.

2. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, x + y + z^2 = 1\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(1, 0, 0)$.

(2 val.) (c) Determine o ponto de M com maior coordenada x.

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$f(x, y) = \left(\frac{3y}{x^2 + y^2}, \frac{-3x}{x^2 + y^2} \right).$$

Seja E a elipse definida pela equação $2x^2 + 3y^2 = 1$. Calcule o trabalho de f ao longo de E percorrida no sentido anti-horário.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}\,;\, z \leq 4\}.$$

(2 val.) (a) Calcule a área de S.

(3 val.) (b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x, y, z) = (-xz + y, e^{x+z}, z^2/2)$$

através de S no sentido da normal n tal que $n_z < 0$.

(2 val.) (c) Considere o campo $A(x, y, z) = (y\alpha(z), -x\alpha(z), z^5 e^x)$, e a função α de classe C^1 tal que $\alpha(4) = 3$.
Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} A$ através de S no sentido da normal n da alínea anterior, usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função implícita usando o teorema da função inversa.