

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 9 de Janeiro de 2017 - 14h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que existe uma vizinhança U do ponto $(0, 1)$ e uma vizinhança V do ponto $(1, 2)$ tais que a função $F : U \rightarrow V$, definida por $F(x, y) = (x^5 + y^3, x + y + 1)$, tem inversa de classe C^1 . Calcule $DF^{-1}(1, 2)$.

2. Considere o conjunto

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = 4\}$$

(1 val.) a) Mostre que L é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) b) Determine um vector normal e um vector tangente a L no ponto $(2, 0)$, ambos não nulos.

(2 val.) c) Determine os pontos de L mais próximos da origem.

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$h(x, y) = (xy^2, x^2y).$$

Calcule o trabalho de h ao longo do caminho $\alpha(t) = (t^2, \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2; z \geq 0\}.$$

(2 val.) a) Calcule a massa de S considerando a densidade de massa $\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{17-4z}}$.

(3 val.) b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x, y, z) = (yz^2, -3y + x^2, 3z)$$

através de S no sentido da normal n tal que $n_z > 0$.

(2 val.) c) Mostre que f é o rotacional do campo $A(x, y, z) = (-3yz, 0, \frac{1}{2}y^2z^2 - \frac{1}{3}x^3)$, e calcule o fluxo da alínea anterior usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.