Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 9 de Janeiro de 2017 - 14h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que existe uma vizinhança U do ponto $(1,0)$ e uma vizinhança V do ponto $(1,1)$ tais que a função $F : U \to V$, definida por $F(x,y) = (x+y, x^5+y^3)$, tem inversa de classe C^1. Calcule $DF^{-1}(1,1)$.

2. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 = 1\}$$

(1 val.) a) Mostre que L é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) b) Determine um vector normal e um vector tangente a L no ponto $(0,1)$, ambos não nulos.

(2 val.) c) Determine os pontos de L mais afastados da origem.

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$h(x,y) = (\cos x, y^2).$$

Calcule o trabalho de h ao longo do caminho $\alpha(t) = (\operatorname{sen}^2(t), t^3)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1\,;\, z \leq 0\}.$$

(2 val.) a) Calcule a massa de S considerando a densidade de massa $\sigma(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2+z+3(x^2+y^2)}}$.

(3 val.) b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x,y,z) = (-x + y^2, xz^2, z)$$

através de S no sentido da normal n tal que $n_z < 0$.

(2 val.) c) Mostre que f é o rotacional do campo $A(x,y,z) = (0, xz, \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2z^2)$, e calcule o fluxo da alínea anterior usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.