Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 8 de Junho de 2015 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z = 0 \ , \ x + y + z = 0 \ \} \ .$$

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(1,1,-2)$.

2. Considere a 2-variedade $S = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2 = 2 \ \}$.

(2 val.) a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$ a condição $(x,y,z) \in S$ pode ser resolvida em ordem a y como função de classe C^1 de (x,z) e calcule $\frac{\partial y}{\partial z}(0,1)$.

(2 val.) b) Calcule o máximo absoluto da função $h(x,y,z) = z$ em S.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x,y,z) = \left(x^2 \ , \ \frac{y}{y^2+z^2} \ , \ \frac{z}{y^2+z^2} \right) \ .$$

(1.5 val.) a) Determine se G é um gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de G ao longo do caminho $\alpha(t) = (t^2, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

4. Considere a superfície definida por

$$B = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 1 + \sqrt{y^2+z^2} \ , \ y^2 + z^2 < 4 \ \} \ ,$$

orientada segundo a normal unitária n com $n_x < 0$.

(2 val.) a) Calcule a área de B.

(2.5 val.) b) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (-x^2+2, xy, xz)$ através de B no sentido de n.

(2.5 val.) c) Calcule o fluxo de $H(x,y,z) = (2x, yz^2, -z - \frac{z^3}{3})$ através de B no sentido de n.

(3 val.) 5. Seja $g : I \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^∞ definida no intervalo $I =]0, 2\pi[$ pela expressão $g(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(2t))$ e seja $L = \{g(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$. Mostre que g é uma função injectiva e que $\frac{dg}{dt}(t) \neq 0$ para qualquer $t \in I$, mas que $g^{-1} : L \to I$ não é contínua. O conjunto L será uma variedade? Justifique cuidadosamente.