Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 8 de Junho de 2015 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $M = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^3 - y^3 + z^3 = 0\ ,\ x - y + z = 0\ ;\ x < y\ \}$.

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(-1,0,1)$.

(2.5 val.) c) Mostre que numa vizinhança do ponto $(-1,0,1)$ a condição $(x,y,z) \in M$ pode ser resolvida em ordem a (y,z) como função f de classe C^1 de x e calcule $\frac{df}{dx}(-1)$.

(2 val.) 2. Calcule o valor máximo da função $h(x,y) = x + 2y$ na variedade

$$C = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 4y^2 = 12\ \}\ .$$

3. Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = \left(y + 2x + \frac{2x}{1+x^2+y^2}\ ,\ -x + \frac{2y}{1+x^2+y^2} \right)\ .$$

(1 val.) a) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ orientada no sentido anti-horário.

4. Considere a superfície definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\}$, orientada segundo a normal unitária n com $n_z < 0$.

(2.5 val.) a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (x, y, -2z+1)$ através de S no sentido de n.

(2.5 val.) b) Calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (y^2 - x, y + x^5, 3z)$ através de S no sentido de n.

(2.0 val.) 5. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho de $H(x,y,z) = (x^3, 3x, z)$ ao longo da curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,10)$.

(3 val.) 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m (com $n > m$), $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e $g : U \to M$ uma função de classe C^1 tal que Dg tem característica igual a m em todos os pontos de U. Mostre que, para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e qualquer $x = g(u) \in M$, o gradiente $\nabla f(x)$ pertence ao espaço normal a M em x se e só se u for um ponto crítico de $f \circ g$. Mostre por meio de um exemplo que se a característica de Dg for diferente de m é possível u ser um ponto crítico de $f \circ g$ sem que $\nabla f(x)$ pertença ao espaço normal.