Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 07 de Junho de 2019 - 11h - v2
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - xy^2 + z^2 = 2\}$.

[2.0] a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

[1.0] b) Determine uma base do espaço tangente a M no ponto $(1, 0, 1)$.

[2.0] 2. Seja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 = 1,\ \ y + z = 1\}$. Determine o ponto de C cuja segunda coordenada é a maior possível, usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

[3.0] 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \left(e^{xy}\,, \frac{1}{2 + y^2}\right).$$

Mostre que f não é injectiva mas é localmente invertível em torno do ponto $(0, -1)$ com inversa de classe C^1. Calcule a derivada de uma inversa de f no ponto $(1, \frac{1}{3})$.

4. Considere a linha

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ (x - 1)^2 + y^2 = 1,\ x \geq 1\}.$$

[2.0] a) Usando o teorema de Green, calcule o trabalho realizado pelo campo $F(x, y) = (y, -x)$ ao longo da linha C percorrida no sentido anti-horário.

[1.0] b) Calcule o trabalho realizado pelo campo $G(x, y) = (6xy, 3x^2)$ ao longo de C no sentido horário.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ z + \sqrt{x^2 + y^2} = 5,\ 3 < z < 4\}.$$

[3.0] a) Calcule, pelo teorema da divergência, o fluxo do campo $F(x, y, z) = (e^y, x - y, z)$ através de S no sentido da normal cuja terceira componente é positiva.

[3.0] b) Calcule, usando o teorema de Stokes, o trabalho realizado pelo campo

$$H(x, y, z) = ((x - y)z, y, e^y)$$

ao longo da linha descrita pelas equações $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$ e percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$.

[3.0] 6. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola centrada na origem, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 tal que $\phi = 0$ em ∂B e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^2.

Mostre que

$$\iiint_B \nabla\phi \cdot \operatorname{rot} F = 0.$$