Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 7 de janeiro de 2019 - 11h30m - v6
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 10, x + y + z - 4)$.

[2.0] (a) Mostre que o conjunto $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}$ é uma variedade e determine a sua dimensão.

[2.0] (b) Determine um vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tangente a C no ponto $(1,0,3)$ tal que $v_3 = 1$.

[2.0] 2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x^5 - y^5 + z^3 = 0 \end{cases}$$

define, em alguma vizinhança do ponto $(1,1,0)$, as variáveis y e z como funções de x, de classe C^1, e calcule as derivadas $\dfrac{dy}{dx}(1)$ e $\dfrac{dz}{dx}(1)$.

[2.0] 3. Determine o máximo e o mínimo da restrição de $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ a

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^4 + 2z^2 = 1\}.$$

4. Considere o campo $F(x,y) = \left(\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} - \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}, -\frac{x}{x^2+(y+1)^2} + \frac{x}{x^2+(y-1)^2}\right)$.

[2.0] (a) Determine se F é fechado.

[2.0] (b) Determine se F é um gradiente em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$.

[3.0] 5. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de

$$F(x,y,z) = (x - 2xz + e^{yz^2}, \cos(x^2+z^2), z(z-1)+2)$$

através da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1,\ 0 < z < 1\},$$

no sentido da normal unitária $\mathbf{n}$ tal que $n_3 > 0$.

[2.0] 6. Usando a definição, calcule o fluxo do campo vetorial $f(x,y,z) = (-x,-y,z)$ através de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2,\ 0 < z < 1\}$, segundo uma normal à sua escolha.

[3.0] 7. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1 cujo fluxo através de todas as superfícies esféricas é zero. Mostre que $\operatorname{div} F = 0$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$.