Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 7 de janeiro de 2019 - 11h30m - v5
Duração: 1h30m

Resolução abreviada

1. Considere a função $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x+y+z-3, x^2+y^2-z^2-5)$.

[2.0] (a) Mostre que o conjunto $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}$ é uma variedade e determine a sua dimensão.

Resolução:
A característica da matriz

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

não é máxima para $x = y = -z$. Neste caso, substituindo em $F(x,y,z) = (0,0)$, obtem-se $x = 3$ e $x^2 = 5$. Assim, a característica de $DF(x,y,z)$ é 2 em todos os pontos do conjunto C e, portanto, C é uma variedade de dimensão 1.

[2.0] (b) Determine um vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ normal a C em $(2,1,0)$ tal que $v_1 = 5$ e $v_2 = 3$.

Resolução:
As linhas da matriz

$$DF(2,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

são vectores normais a C no ponto $(2,1,0)$. Somando estes dois vectores obtem-se o vector $(5,3,1)$.

[2.0] 2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - z^5 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

define, em alguma vizinhança do ponto $(-1,1,0)$, as variáveis x e z como funções de y, de classe C^1, e calcule as derivadas $\dfrac{dx}{dy}(1)$ e $\dfrac{dz}{dy}(1)$.

Resolução:
Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $F(x,y,z) = (x^3+y^3-z^5, x+y-z)$. Da matriz

$$DF(-1,1,0) = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 & -5z^4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{(-1,1,0)} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\det D_{x,z}F(-1,1,0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -3 \neq 0.$$

O teorema da função implícita garante que o sistema $F(x,y,z) = (0,0)$ define x e z como funções de y, de classe C^1, em alguma vizinhança do ponto $(-1,1,0)$.

Assim, tem-se $F(x(y), y, z(y)) = (0,0)$ e, usando a regra da cadeia obtem-se

$$\begin{cases} 3x'(1) + 3 = 0 \\ x'(1) + 1 - z'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(1) = -1 \\ z'(1) = 0 \end{cases}$$

[2.0] 3. Determine o máximo e o mínimo da restrição de $f(x,y,z) = y^2 + z^2$ a

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + 2y^2 + z^2 = 1\}.$$

Resolução:

Do método dos multiplicadores de Lagrange, obtem-se o sistema

$$\begin{cases} 0 = 4\lambda x^3 \\ 2y = 4\lambda y \\ 2z = 2\lambda z \\ x^4 + 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são os pontos:

$$(-1,0,0),\ (1,0,0),\ (0,-\frac{\sqrt{2}}{2},0),\ (0,\frac{\sqrt{2}}{2},0),\ (0,0,-1),\ (0,0,1).$$

Assim, o máximo de f é 1 e o mínimo de f é 0.

4. Considere o campo $F(x,y) = \left(-\frac{y}{(x+1)^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)$.

[2.0] (a) Determine se F é fechado.

Resolução:

Calculando directamente obtem-se $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$, ou seja, o campo F é fechado.

[2.0] (b) Determine se F é um gradiente em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$.

Resolução:

Basta reconhecer F como a soma de dois "ralos de banheira" nos pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$ para concluir que o trabalho de F em qualquer circunferência centrada na origem, percorrida no sentido positivo e contida em D é 4π. Portanto, o campo F não é gradiente em D.

[3.0] 5. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de

$$F(x,y,z) = (2xz - x + e^{zy^2}, \operatorname{sen}(x^2+z^2), z(1-z) + 3),$$

através da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2,\ 0 < z < 1\},$$

no sentido da normal unitária $\mathbf{n}$ tal que $n_3 < 0$.

Resolução:

Considere-se o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 2 - x^2 - y^2,\ 0 < z < 1\}$$

e note-se que $\partial V = S \cup A \cup B$, em que

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 < 2\}, \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1,\ x^2 + y^2 < 1\}$$

Aplicando o teorema da divergência e tendo em conta que $\operatorname{div} F = 0$ obtem-se

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} = -\iint_A F \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} - \iint_B F \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} = 6\pi - 3\pi = 3\pi.$$

Observando que $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_{\text{ext}}$, tem-se

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n} = -3\pi.$$

[2.0] 6. Calcule o integral do campo escalar $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 2z^2}$ em

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2,\ 0 < z < 1\}.$$

Resolução:

Considere-se a parametrização $g : T \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = (\sqrt{1 + z^2}\cos(\theta), \sqrt{1 + z^2}\operatorname{sen}(\theta), z)$$

sendo

$$T = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi,\ 0 < z < 1\}.$$

Assim, tem-se

$$\iint_S f = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 f(g(\theta, z)) \| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} \| dz \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 + 2z^2) dz \right) d\theta = \frac{10\pi}{3}.$$

[3.0] 7. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1 cujo fluxo através de todas as superfícies esféricas é zero. Mostre que $\operatorname{div} F = 0$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

Seja $x \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer, $B = B(x, R)$ a bola de raio $R > 0$ e centro em x e $S = \partial B$. Aplicando o teorema da divergência obtem-se

$$\iiint_B \operatorname{div} F = \iint_S F \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} = 0.$$

Tendo em conta que

$$\lim_{R \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(B)} \iiint_B \operatorname{div} F = \operatorname{div} F(x)$$

conclui-se que $\operatorname{div} F(x) = 0$, ou seja, $\operatorname{div} F = 0$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$.