Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 3) - 07 de Janeiro de 2013 - 16h30
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, x + y = 1\}$.

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) (b) Determine a recta tangente a M no ponto $(1, 0, 1)$.

(3 val.) (c) Determine o ponto de M cuja coordenada z é a maior possível.

(3 val.) 2. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} y + w = \pi \\ y \operatorname{sen} x + 2x + z + w = 3\pi, \end{cases}$$

define as variáveis x e y como funções das variáveis z e w em alguma vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (\frac{\pi}{2}, \pi, 0, \pi)$ e calcule a derivada $\frac{\partial x}{\partial z}(0, \pi)$.

(4 val.) 3. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + y^2 + z^2, x < 5\}$ e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = \left(\frac{e^{2x^2yz} - 1}{\sqrt{1 + z^2}}, 2x^2y, 3xz \right)$.

Calcule o fluxo $\int_S \operatorname{rot} F \cdot n$, onde n é a normal unitária com primeira componente negativa.

(4 val.) 4. Considere a superfície $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4, y > 0, 0 < x < 2\}$ e o campo vectorial $F(x, y, z) = (x, 2y - y^2, 2y + 2yz + 1)$. Calcule o fluxo de F através de M num sentido à sua escolha, usando o teorema da Divergência.

(3 val.) 5. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(\frac{\alpha x - 3y}{x^2 + y^2}, \frac{3x + \alpha y}{x^2 + y^2}, z \right)$, em que $\alpha \neq 0$, e a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$.

Determine os valores possíveis do trabalho $\int_\Gamma F$, sendo Γ uma linha fechada, contida em S e percorrida uma só vez.