Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 07 de Janeiro de 2013 - 14h30

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x + z = 1\}$.

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) (b) Determine a recta tangente a M no ponto $(0, 1, 1)$.

(3 val.) (c) Determine o ponto de M cuja coordenada y é a maior possível.

(3 val.) 2. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} x + ue^v = 2 \\ x + y + ve^u = 6, \end{cases}$$

define as variáveis u e v como funções das variáveis x e y em alguma vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (2, 3, 0, 1)$ e calcule a derivada $\dfrac{\partial v}{\partial y}(2, 3)$.

(4 val.) 3. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 6 - x^2 - z^2, y > 2\}$ e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = \left(3xy^2, \dfrac{e^{2x^2yz} - 1}{\sqrt{1 + z^2}}, 5yz\right)$.

Calcule o fluxo $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} F \cdot n$, onde n é a normal unitária com segunda componente positiva.

(4 val.) 4. Considere a superfície $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, x > 0, 0 < y < 2\}$ e o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(4x - \dfrac{x^2}{2}, y, 2z + xz - 1\right)$. Calcule o fluxo de F através de M num sentido à sua escolha, usando o teorema da Divergência.

(3 val.) 5. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(\dfrac{x - \alpha y}{x^2 + y^2}, \dfrac{\alpha x + y}{x^2 + y^2}, z\right)$, em que $\alpha \neq 0$, e a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$.

Determine os valores possíveis do trabalho $\displaystyle\int_\Gamma F$, sendo Γ uma linha fechada, contida em S e percorrida uma só vez.