Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 07 de Janeiro de 2013 - 14h30
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, y + z = 1\}$.

(2 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) (b) Determine a recta tangente a M no ponto $(1,0,1)$.

(3 val.) (c) Determine o ponto de M cuja coordenada x é a maior possível.

(3 val.) 2. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} v + xe^y = 2 \\ u + v + ye^x = 6, \end{cases}$$

define as variáveis x e y como funções das variáveis u e v em alguma vizinhança do ponto $(x,y,u,v) = (0,1,3,2)$ e calcule a derivada $\dfrac{\partial y}{\partial u}(3,2)$.

(4 val.) 3. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 + x^2 + z^2, y < 5\}$ e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z) = \left(3xy^2, \dfrac{e^{2x^2yz} - 1}{\sqrt{1+z^2}}, 5yz\right)$.

Calcule o fluxo $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} F \cdot n$, onde n é a normal unitária com segunda componente negativa.

(4 val.) 4. Considere a superfície $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, z > 0, 0 < y < 2\}$ e o campo vectorial $F(x,y,z) = \left(2x + xz - 1, y, 4z - \dfrac{z^2}{2}\right)$. Calcule o fluxo de F através de M num sentido à sua escolha, usando o teorema da Divergência.

(3 val.) 5. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = \left(\dfrac{x - \alpha y}{x^2+y^2}, \dfrac{\alpha x + y}{x^2+y^2}, z\right)$, em que $\alpha \neq 0$, e a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$.

Determine os valores possíveis do trabalho $\displaystyle\int_\Gamma F$, sendo Γ uma linha fechada, contida em S e percorrida uma só vez.