Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - v2 - 9h - 06 de junho de 2016

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

[3.0] 1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2(y+z) + e^{x+z} + \cos(\pi y) = 0 \\ e^x(y+z) + \cos(x+z) - z = 2 \end{cases}$$

Prove que o sistema permite definir x e z como funções continuamente diferenciáveis de y numa vizinhança de $(0,1,0)$. Representando essas funções por x e z, determine a derivada $\dfrac{dx}{dy}(1)$.

2. Sejam $k \in \mathbb{Z}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$ e

$$V_{k,\beta} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y^k = \beta + x^k\right\}$$

[1.5] a) Prove que $V_{k,\beta}$ é uma variedade para qualquer $\beta \neq 0$. Qual a sua dimensão?

[1.5] b) Indique o espaço tangente a $V_{2,4}$ no ponto $(2,2)$.

[1.0] c) Diga, justificando, se $V_{k,0}$ é variedade diferencial para k par. O que pode afirmar para k ímpar?

[3.0] 3. Estude, quanto à existência de extremos, a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x - z$ em que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 8\}$.

[3.0] 4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \; ; \; 0 < z < 2 - x\}$$

e o campo vetorial $F(x,y,z) = (-x-z, xz, x+z)$. Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal n tal que $n(0,1,1) = (0,1,0)$, usando o teorema da divergência.

5. Considere a linha

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \; ; \; x + z = 1\}$$

e o campo vetorial $F(x,y,z) = (e^{x^2} + 3y, 3x, xz)$.

[1.0] a) Indique justificadamente se o campo F é conservativo.

[3.0] b) Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo F ao longo da linha L percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,100)$.

[3.0] 6. Sejam $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dois campos escalares de classe C^2 e S uma superfície limitada e orientável com bordo ∂S. Prove que

$$\int\int_S (\nabla\phi \times \nabla\psi).n \, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} (\phi \nabla \psi) \, \mathrm{d}g$$

em que g é um caminho regular que descreve ∂S com orientação compatível com a da normal n de S.