*Instituto Superior Técnico*
*Departamento de Matemática*
*Secção de Álgebra e Análise*

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - v2 - 11h30 - 06 de junho de 2016
Duração: 1h30m

**Apresente e justifique todos os cálculos**

[3.0] 1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por

$$g(x, y) = \Big(y^2 \operatorname{sen}(x^2) + 2x(\mathrm{e}^y - 1), x - y + \cos(x + y - 1)\Big)$$

Prove que $g$ tem uma inversa local de classe $C^1$ numa vizinhança de $(1, 0)$. Sendo $g^{-1}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ essa inversa, determine $\dfrac{\partial x}{\partial v}(0, 2)$.

2. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto definido por

$$\begin{cases} y \cos x - z \operatorname{sen} x = 2 \\ y \operatorname{sen} x + z \cos x = 1 \end{cases}$$

[1.5] a) Prove que $U$ é uma variedade diferencial. Qual a sua dimensão?

[1.5] b) Indique o espaço normal a $U$ no ponto $(0, 2, 1)$.

[1.0] c) Indique uma parametrização para $U$.

[3.0] 3. Estude quanto à existência de extremos a função definida por $f(x, y, z) = 2y - x$ no conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$.

[3.0] 4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \ ; \ z < 1 \ ; \ x > 0\}$$

e o campo vetorial $F(x, y, z) = (2xy, y - y^2, 3 - z)$. Calcule o fluxo de $F$ através de $S$ segundo a normal com terceira componente negativa, usando o teorema da divergência.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \ ; \ z > 0\}$$

e o campo vetorial $F(x, y, z) = (yz - y, xz, xy)$.

[1.0] a) Indique justificadamente se o campo $F$ é conservativo.

[3.0] b) Calcule o fluxo do rotacional de $F$ através de $S$ segundo a normal $n$ com terceira componente negativa, usando o teorema de Stokes.

[3.0] 6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial cuja divergência é constante, $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície limitada cujo espaço normal é o mesmo em todos os pontos e $u$ um vector não nulo desse espaço normal. Considere ainda as superfícies $S_t = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = a + tu; \quad a \in S\}$, em que $t \in [0, 1]$.

Prove que se o campo $f$ pertence ao espaço normal a $S_t$ em todos os seus pontos, para todo $t \in [0, 1]$, então

$$\int\!\!\int_{S_1} f.n \, \mathrm{d}S - \int\!\!\int_S f.n \, \mathrm{d}S = \int\!\!\int_S (\operatorname{div} f) ||u|| \, \mathrm{d}S$$

em que as normais, em $S$ e em $S_1$, têm o mesmo sentido de $u$.