Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2020 - 14h - v2

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

[2.0] 1. Mostre que a equação $y^5 + 2xy^3 + yz = 1$ define y como função de x e z, de classe C^1, em alguma vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$ e calcule as derivadas $\frac{\partial y}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial y}{\partial z}(0, 0)$.

[2.0] 2. Mostre que o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^5+2xy^3+yz = 1\}$ é uma variedade, indicando a respectiva dimensão, e determine uma base do espaço tangente a M no ponto $(0, 1, 0)$.

[3.0] 3. Determine o mínimo da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = y$ no conjunto dado pelas equações $x^2 + z^2 = 1$, $y + z = 1$.

4. Sejam $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, -1)\} \to \mathbb{R}^2$ os campos vetoriais dados por

$$F(x, y) = (3x^2y^2, 2x^3y + y),$$

$$G(x, y) = \left(\frac{y + 1}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}, -\frac{x + 1}{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}\right).$$

Determine, justificando, se os seguintes campos vetoriais são conservativos:

[1.0] a) $F(x, y)$

[2.0] b) $G(x, y) - F(x, y)$

[1.0] 5. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ \alpha < z < 1\}$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$. Parametrize S e calcule a respectiva área em função de α.

[3.0] 6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 tal que $F(x, y, 0) = (3y, -3x, \operatorname{sen}(x^2+y^2))$ e seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, z > 0\}$. Calcule o fluxo $\int_P \operatorname{rot} F \cdot n$, onde n é uma normal unitária a P tal que $n_3 > 0$.

[3.0] 7. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1,\ 0 < x < 2\}$$

e o campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (x^2 - x, \operatorname{sen}(x^2) - 2xy, \cos(x^2) + z)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$, onde n é uma normal unitária a S tal que $n(1, 1, 0) = (0, 1, 0)$.

[3.0] 8. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 que se anula em ∂V. Mostre que se tem

$$\int_V \nabla\phi \cdot \operatorname{rot} F = 0.$$