Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2014 - **16h00 (versão 1)**
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1\}$.

(1 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0,0,1)$.

(2 val.) c) Determine os extremos da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ em M.

(2 val.) 2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + xy + y^2 \\ v = x^2 - y^2. \end{cases}$$

define implicitamente (x,y) como função de (u,v), em alguma vizinhança do ponto $(x,y,u,v) = (0,1,1,-1)$. Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(1,-1)$.

(2 val.) 3. Considere o campo vectorial $F(x,y) = \left(\cos x + \dfrac{y}{x^2+y^2}, \cos y - \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Calcule o trabalho realizado por F ao longo da elipse definida por $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2 - \sqrt{x^2+z^2}\ ;\ 0 < y < 1\}$$

orientada com a normal n que tem a segunda componente positiva.

(2 val.) a) Calcule a área de S.

(3 val.) b) Sendo $F(x,y,z) = (\cos(yz) - 2x, y - 1, z + e^{xy})$ calcule o fluxo de F através da superfície S no sentido da normal n.

(2 val.) c) Sendo $H(x,y,z) = (0, y^2, -2yz)$ determine um campo vectorial A da forma $A = (A_1, A_2, 0)$ tal que $\operatorname{rot} A = H$.

(2 val.) d) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial H através de S no sentido da normal n.

(3 val.) 5. Seja $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial fechado e Γ a circunferência definida pelas equações $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$. Sabendo que

$$\oint_\Gamma F \cdot dg = a, \quad \text{com } a \in \mathbb{R},$$

onde Γ é percorrida uma vez no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,1)$, determine, justificadamente, todos os valores possíveis para o integral de linha $\oint_C F \cdot dg$ onde C é uma curva fechada regular contida na superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$.