Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 06 de Janeiro de 2014 - **14h00 (versão 2)**
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2 \ ; \ x^2 + xy + y^2 = 3\}$$

(1 val.) a) Mostre que S é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(1 val.) b) Determine o espaço normal a S no ponto $(1,1,0)$.

(2 val.) c) Determine o ponto de S que apresenta menor coordenada y.

(2 val.) 2. Mostre que a equação $x^2 + 2y + \operatorname{sen}(y^2 - x^2) + 3z = 6$ define implicitamente y como função de (x,z), em alguma vizinhança do ponto $(0,0,2)$. Calcule $\dfrac{\partial y}{\partial z}(0,2)$.

(2 val.) 3. Considere o campo vectorial $G(x,y) = \left(\dfrac{x}{2+x^2} - 3y, \dfrac{y}{3+y^2} + x\right)$.

Calcule o trabalho realizado por G ao longo do losango definido por $\dfrac{|x|}{2} + |y| = 1$, percorrido uma vez no sentido anti-horário.

4. Seja $F(x,y,z) = (2x+4, y, z)$ e considere a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = x + 2 \ ; \ -1 < x < 2\}$$

orientada com a normal n que tem a primeira componente negativa.

(3 val.) a) Calcule o fluxo $\int_M F \cdot n$ pela definição.

(3 val.) b) Calcule o fluxo $\int_M F \cdot n$ pelo Teorema da Divergência.

(3 val.) c) Sendo $H(x,y,z) = (e^{x^2+y^2}, -z, y)$ calcule o fluxo de $\operatorname{rot} H$ através da superfície M, no sentido da normal n.

(3 val.) 5. Seja $G : \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,-1),(1,1)\} \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial fechado e $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ as circunferências definidas pelas equações $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, respectivamente. Sabendo que

$$\oint_{\Gamma_1} G \cdot dg_1 = c_1, \quad \oint_{\Gamma_2} G \cdot dg_2 = c_2 \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

onde as curvas Γ_1 e Γ_2 são percorridas uma vez no sentido anti-horário, determine, justificadamente, todos os valores possíveis para o integral de linha $\oint_C G \cdot dg$ onde C é uma curva regular fechada contida no domínio de F.