Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 04 de Janeiro de 2016 - 16h (versão 2)
Duração: 90 minutos
Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere os conjuntos

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y(x^2 + z) + z^3 + 1 = 0;\ y > 0\}$$
$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : yz + x + z^2 - 1 = 0\}$$

[1.0] a) Mostre que M é uma variedade, e indique a sua dimensão.

[1.0] b) Determine o espaço normal a M no ponto $(1, 1, -1)$.

[2.0] c) Mostre que, numa vizinhança do ponto $(1, 1, -1)$, o conjunto $M \cap N$ é o gráfico de uma funçao $f \in C^1$, ou seja, $(y, z) = f(x)$, e calcule $Df(1)$.

[2.0] 2. Determine os extremos absolutos da função f dada por $f(x, y) = 2x^2 + (y - 1)^2$ no conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

3. Considere os campos vetoriais

$$F(x, y) = (y^3, 3xy^2)\,; \quad G(x, y) = (-2y, x).$$

[1.0] a) Determine qual dos dois campos é conservativo e indique o respetivo potencial escalar.

[3.0] b) Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado por cada um dos campos G e $G - F$, ao longo da linha definida pela equação $|x| + |y| = 1$ e descrita no sentido positivo.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = 1 - (x^2 + z^2);\ x^2 + z^2 < 1\}.$$

[1.0] a) Calcule a área de S;

[2.0] b) Calcule $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é a normal unitária tal que $n_y > 0$ e F é o campo

$$F(x, y, z) = (xe^{y^3}, x^2 - z^2, ze^{y^3}).$$

5. Considere o campo $F(x, y, z) = (y^2 + \cos(2\pi z^2) - x, x^2 + \cos(2\pi z^2), 1 + z)$ e o sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ (x^2 + y^2)^{3/2} < z < 1\}.$$

[2.0] a) Calcule $\iint_{\partial V} F \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a V.

[2.0] b) Calcule $\iint_S F \cdot \mathbf{n}$ onde S é a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ z = (x^2 + y^2)^{3/2}\},$$

e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a V.

[3.0] 6. Seja $|D| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in D\}$ o diâmetro do conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 e $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável e contida num plano perpendicular a um dado vetor unitário $\mathbf{n}$.

Seja (B_k) uma sucessão de bolas centradas num ponto $p \in S$, tais que $\lim_{k\to\infty} |B_k| = 0$. Seja $S_k = S \cap B_k$. Mostre que

$$\operatorname{rot} F(p) \cdot \mathbf{n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}_2(S_k)} \int_{\partial S_k} F \cdot d\gamma_k,$$

em que γ_k é um caminho regular simples que descreve a linha ∂S_k, com orientação compatível com a de S_k. Conclua que $\operatorname{rot} F$ é independente do sistema de coordenadas.