Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 04 de Janeiro de 2016 - 14h (versão 2)

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y(1+z^2) - x^4 + 3 = 0\}.$$

[1.0] a) Mostre que M é uma variedade, e indique a sua dimensão.

[1.0] b) Indique uma base do espaço tangente a M no ponto $(1,-1,1)$.

[2.0] c) Mostre que o sistema de equações $\begin{cases} y(1+z^2) - x^4 + 3 = 0 \\ y^3 - x + 2 = 0 \end{cases}$ determina y e z em função de x, ou seja, $(y,z) = f(x)$, com $f \in C^1$, numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, e calcule $Df(1)$.

[2.0] 2. Determine os extremos absolutos da função f dada por $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ no conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

3. Considere os campos vetoriais

$$F(x,y) = \left(\log(1+y^2), \frac{2xy}{1+y^2}\right) ; \quad G(x,y) = (y,0).$$

[1.0] a) Determine qual dos dois campos é conservativo e indique o respetivo potencial escalar.

[3.0] b) Use o teorema de Green para calcular o trabalho realizado por cada um dos campos G e $F+G$, ao longo da linha definida pela equação $x^2+y^2=1$ e descrita no sentido positivo.

4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : y = 1 - \sqrt{x^2+z^2};\ x^2+z^2 < 1\}.$$

[1.0] a) Calcule a área de S;

[2.0] b) Calcule $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é a normal unitária tal que $n_y > 0$ e F é o campo

$$F(x,y,z) = (xe^{y^3}, x^2 - z^2, ze^{y^3}).$$

5. Considere o campo $F(x,y,z) = (y^2 + \cos z, -x^2 + \cos z - y, 1 + z)$ e o sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ 0 < z < 1 - (x^2+y^2)^{3/2}\}.$$

[2.0] a) Calcule $\iint_{\partial V} F \cdot \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a V.

[2.0] b) Calcule $\iint_S F \cdot \mathbf{n}$ onde S é a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ z = 1 - (x^2+y^2)^{3/2}\},$$

e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a V.

[3.0] 6. Seja $|D| = \sup\{\|x-y\| : x,y \in D\}$ o diâmetro do conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1, e (D_k) uma sucessão de domínios regulares contendo um dado ponto p, tais que $\lim_{k\to\infty} |D_k| = 0$. Mostre que

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(D_k)} \iint_{\partial D_k} F \cdot \nu,$$

sendo ν a normal unitária e exterior a D_k. Conclua que $\operatorname{div} F$ é independente do sistema de coordenadas.