Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2

TESTE 1B - 24 DE ABRIL DE 2010 - DAS 9H ÀS 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[2 val.] (a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

[2 val.] (b) Determine a direcção em que f cresce mais rapidamente no ponto $(-1,1)$.

[2 val.] (c) Sendo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável com $g(3,0,1) = (-1,1)$ e

$$Dg(3,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

calcule $\nabla(f \circ g)(3,0,1)$.

[2 val.] 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função $f = f(u,v)$ de classe C^2 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(2,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(2,0) = -1$. Sendo h a função definida por $h(x,y) = f(2x - y^2, xy)$, calcule $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,0)$.

[2 val.] 3. Mostre que o sistema de equações

$$x + y^3 - z^4 = 1 \quad \text{e} \quad z^2 + x\,z + x\,y = 3.$$

define x e z como funções de y numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (1,1,1)$. Calcule $\frac{dz}{dy}(1)$.

[3 val.] 4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x^2 - 3y^2 + 5.$$

5. Considere o conjunto

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2\,y > 0,\ z = \frac{1}{(x + 2\,y)} \right\}.$$

[2 val.] (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

[1 val.] (b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(3,-1,1)$.

[1 val.] (c) Determine uma equação cartesiana do plano tangente a M em $(3,-1,1)$.

[3 val.] 6. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a 2 se anulam em $(0,0)$. Mostre que se alguma das terceiras derivadas parciais de f em $(0,0)$ não é nula então $(0,0)$ é um ponto de sela de f.