Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2014 - 10h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1 val.) a) Estude a continuidade de h.

(2 val.) b) Estude a diferenciabilidade da função $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $k(x,y) = xh(x,y)$.

(2 val.) 2. Seja $\psi(u,v) = g(u+v, u^2)$, onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(2,4) = \frac{\partial g_1}{\partial y}(2,4) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(2,4) = \frac{\partial g_2}{\partial y}(2,4) = 1\ .$$

Calcule $D\psi(2,0)$.

3. Considere a função $\phi(x,y) = e^{x^2} \operatorname{sen} y$.

(2 val.) a) Calcule os pontos críticos de ϕ.

(2 val.) b) Classifique os pontos críticos de ϕ.

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x \le 1\ ;\ 0 \le z \le y \le 1\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.

(2 val.) (b) Calcule o integral $\int_X f$, em que $f(x,y,z) = y$, usando um único integral triplo.

(2 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto seguinte:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + z^2 < 4;\ 0 < y < 2 - \sqrt{x^2+z^2}\ ;\ x > 0;\ z > 0\}.$$

(2 val.) 6. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x + y < x - y < 0\}.$$

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o integral $\int_A f$ em que $f(x,y) = x + y$.

(3 val.) 7. Seja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, e $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de conteúdo nulo. Prove que $g(D)$ tem conteúdo nulo.

Nota: Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon > 0$, existir uma coleção finita de intervalos $\{I_k\}_{k=1}^N$, tais que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n \operatorname{vol}(I_k) < \epsilon.$$