Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2014 - 10h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1 val.) a) Estude a continuidade de g.

(2 val.) b) Estude a diferenciabilidade da função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = xg(x,y)$.

(2 val.) 2. Seja $\phi(u,v) = f(u^2 v, u+v)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2) = 1 \ .$$

Calcule $D\phi(1,1)$.

3. Considere a função $h(x,y) = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$.

(2 val.) a) Calcule os pontos críticos de h.

(2 val.) b) Classifique os pontos críticos de h.

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y \leq 1 \ ; \ 0 \leq -x \leq y \leq 1\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dy\right) dx\right) dz$.

(2 val.) (b) Calcule o integral $\int_X f$, em que $f(x,y,z) = -x$, usando um único integral triplo.

(2 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto seguinte:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + z^2 < 4; \ 0 < y < (\sqrt{x^2+z^2} - 1)^2 \ ; \ x > 0; \ z > 0\}.$$

(2 val.) 6. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < y - x < 1\}.$$

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o integral $\int_A f$ em que $f(x,y) = x + y$.

(3 val.) 7. Seja $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, e $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de conteúdo nulo. Prove que $g(D)$ tem conteúdo nulo.

Nota: Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo se, dado $\epsilon > 0$, existir uma coleção finita de intervalos $\{I_k\}_{k=1}^N$, tais que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{vol}(I_k) < \epsilon.$$