

## Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 8 de Novembro de 2014 - 8h

Duração: 90 minutos

### Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(1 val.) a) Estude a continuidade de  $g$ .

(2 val.) b) Estude a diferenciabilidade da função  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x, y) = x^2 g(x, y)$ .

- (2 val.) 2. Seja  $h(u, v) = g(u - v, 2u + 2v)$ , onde  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é diferenciável e

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(2, 0) = \frac{\partial g_1}{\partial y}(2, 0) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(2, 0) = \frac{\partial g_2}{\partial y}(2, 0) = 1.$$

Calcule  $Dh(1, -1)$ .

3. Considere a função  $g(x, y) = x^2 - \sin^2 y$ .

(2 val.) a) Calcule os pontos críticos de  $g$ .

(2 val.) b) Classifique os pontos críticos de  $g$ .

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y \leq 1 ; 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de  $X$  em termos de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int dy) dx) dz$ .

(2 val.) (b) Calcule o integral  $\int_X f$ , em que  $f(x, y, z) = x$ , usando um único integral triplo.

- (2 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto seguinte:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < y^2 + z^2 ; 0 < x < 3 - \sqrt{y^2 + z^2} ; y > 0 ; z > 0\}.$$

- (2 val.) 6. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < x - y < 1\}.$$

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o integral  $\int_A f$  em que  $f(x, y) = x + y$ .

- (3 val.) 7. Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto de conteúdo nulo. Prove que  $g(D)$  tem conteúdo nulo.

Nota: Diz-se que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem conteúdo nulo se, dado  $\epsilon > 0$ , existir uma coleção finita de intervalos  $\{I_k\}_{k=1}^N$ , tais que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n \text{vol}(I_k) < \epsilon.$$