Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXECEPTO LEB, LEBM, LEFT, LEMAT, LEQ, LMAC, LQ
TESTE 1 – 28 DE ABRIL DE 2007 – VERSÃO 2

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(3 val.) (1) Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 3 + 4\,\dfrac{2x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ a, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de a para que f seja contínua na origem.

(2 val.) (2) Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (xy, x^2+y^2)$ e a função de classe C^1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(1,1,1) = (1,2)$ e

$$Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ f$ no ponto $(1,1,1)$, segundo o vector $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(3 val.) (3) Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + \frac{2}{3}z^3 - 2z.$$

(4) O tempo t e as coordenadas (x,y) de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2ye^{y-1} &= t \\ x^2+y^2 &= \cos^2(\frac{\pi}{2}t) + 1. \end{cases}$$

(2 val.) a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (2,1,1)$, uma função de classe C^1, dada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

(1.5 val.) b) Calcule $\gamma'(2)$.

(5) Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\,;\, x = y\,;\, x > 0\,;\, z > 0\}.$$

(2 val.) a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Determine um vector normal a M no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(2 val.) c) Parametrize M.

(3 val.) (6) Mostre que a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $H(x,y) = (2xy, y^2 - x^2)$, transforma curvas ortogonais que passam no ponto $(1,0)$ em curvas ortogonais que passam no ponto $(0,-1)$.