

## Cálculo Diferencial e Integral II

Todos os cursos excepto MEBiom, MEFT, LMAC

Teste 1 - 18 de Abril de 2009 - 11h - Versão 2

Duração: 90 minutos

### Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a seguinte função definida em  $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Estude  $f$  quanto à continuidade.

(1 val.) (b) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

2. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar diferenciável.

(3 val.) (a) Supondo que a derivada de  $f$  no ponto  $(1, 2)$  na direcção do vector  $(2, -2)$  é 6, e na direcção do vector  $(1, 1)$  é 1, mostre que  $\nabla f(1, 2) = (2, -1)$ .

(2 val.) (b) Seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função  $g(x, y, z) = (1 - x - z^2, 3 - y - e^z)$ . Determine  $D(f \circ g)(0, 0, 0)$ .

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função  $f(x, y) = x^2 + y^2 e^{-y^2}$ .

(2 val.) 4. (a) Mostre que a equação  $e^x + x = 1 + 2y^2 - 2yz + z^2$  define localmente  $x$  como função de  $y$  e  $z$  (isto é  $x = f(y, z)$ ) numa vizinhança do ponto  $(0, 0, 0)$ , onde  $f$  é uma função de classe  $C^1$ .

(2 val.) (b) Calcule a derivada de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .

(2 val.) (c) Prove que  $f$  possui um mínimo local no ponto  $(0, 0)$ .

(3 val.) 5. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar diferenciável tal que  $\nabla f(x, y) = 0$  para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Prove que  $f$  é constante.