**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 13 de Abril de 2019 - 9:00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Indique em que pontos de $\mathbb{R}^2$ a função $g$ é diferenciável.

[1,0] b) Calcule $D_{\boldsymbol{v}}g(0,0)$ para um vector arbitrário $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

[2,0] c) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$.

[2,0] d) Mostre que $g$ não é de classe $C^1$.

[2,0] 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = g(3x+y, -3x+y)$. Obtenha expressões para $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em função das derivadas parciais de $g$.

[2,0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $h(x,y) = -2x^2 - 9y + 3y^3$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 < 4 \, , \, x > 0 \, , \, x < z < 4 - x\} \, .$$

Escreva uma expressão para o volume de $A$ em termos de integrais iterados da forma:

[2,0] (a) $\int(\int(\int dz)dy)dx$;

[2,0] (b) $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

[2,0] 5. Considere uma bola em $\mathbb{R}^3$ de diâmetro $d > 0$ que é intersectada por um plano que a divide em dois conjuntos. Determine o volume de cada um destes conjuntos, sabendo que o plano passa a uma distância $D \geq 0$ do centro da bola.

[3,0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua na origem e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = yf(x,y)$. Mostre que $g$ é diferenciável na origem e calcule a sua derivada.