Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 13 de Abril de 2019 - 9:00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Indique em que pontos de $\mathbb{R}^2$ a função f é diferenciável.

Resposta: A função definida pela expressão $\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$ é um quociente de polinómios e por isso é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Portanto f é diferenciável em todos os pontos $(x,y) \neq (0,0)$. As derivadas parciais na origem são

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \end{aligned}$$

e portanto a matriz Jacobiana $Df(0,0)$ existe e é a matriz nula. Logo, f é diferenciável na origem se e só se o seguinte limite existir e for igual a 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-Df(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \, .$$

As desigualdades seguintes mostram que o limite é de facto 0, pois $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{x^2y^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \frac{x^2y^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2y^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \, . \end{aligned}$$

Portanto f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

[1,0] b) Calcule $D_{\boldsymbol{v}} f(0,0)$ para um vector arbitrário $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

Resposta: Uma vez que f é diferenciável no ponto $(0,0)$ e a matriz Jacobiana é nula, temos, para qualquer $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = Df(0,0)\boldsymbol{v} = 0 \, .$$

[2,0] c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$.

Resposta:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2} - \frac{x^2y^2}{(x^4+y^2)^2}2y = \frac{2x^2y}{x^4+y^2} - \frac{2x^2y^3}{(x^4+y^2)^2}\ .$$

[2,0] d) Mostre que f não é de classe C^1.

Resposta: A restrição à curva $y = x^2$ da função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$ pode ser descrita como a seguinte função de $x \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2) = \frac{2x^4}{x^4+x^4} - \frac{2x^8}{(x^4+x^4)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

Por outro lado, como vimos acima, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \neq \dfrac{1}{2}$, e portanto a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua no ponto $(0,0)$. Uma vez que pelo menos uma das derivadas parciais de f não é contínua, conclui-se que f não é de classe C^1.

[2,0] 2. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = f(x+2y, x-2y)$. Obtenha expressões para $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ em função das derivadas parciais de f.

Resposta: Fazendo $f \equiv f(u,v)$ e usando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}(x+2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}(x-2y) = 2\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}$$

e portanto

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\frac{\partial f}{\partial u}(x+2y, x-2y) - 2\frac{\partial f}{\partial v}(x+2y, x-2y)\ .$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] \\
&= 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x+2y, x-2y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x+2y, x-2y)\ .$$

[2,0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y + y^2$.

Resposta: A matriz Jacobiana de f é

$$Df = \begin{bmatrix} 3-3x^2 & -2+2y \end{bmatrix}$$

e por isso os pontos críticos são $(-1,1)$ e $(1,1)$, que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 3-3x^2 = 0 \\ -2+2y = 0 \end{cases}$$

A matriz Hessiana é

$$D^2 f = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e nos pontos críticos temos

$$D^2 f(-1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $D^2 f(-1,1)$ é definida positiva porque os valores próprios são ambos positivos (coincidem com as entradas da diagonal principal, uma vez que a matriz é diagonal) e portanto $(-1,1)$ é um ponto de mínimo.

A matriz $D^2 f(1,1)$ é indefinida (pois os valores próprios têm sinais diferentes) e portanto $(1,1)$ é um ponto de sela.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 < 4 \, , \; y > 0 \, , \; y < z < 4 - y\} \, .$$

Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma:

[2,0] (a) $\int (\int (\int \, dz) dy) dx$;

Resposta: $V_3(A) = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_y^{4-y} 1 dz \right) dy \right) dx.$

[2,0] (b) $\int (\int (\int \, dx) dy) dz$.

Resposta: $V_3(A) = \displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^z \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz + \int_2^4 \left(\int_0^{4-z} \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz.$

[2,0] 5. Considere um plano em $\mathbb{R}^3$ que intersecta uma bola de raio $R > 0$, dividindo-a em dois subconjuntos. Sabendo que o plano passa a uma distância $d \geq 0$ do centro da bola, determine o volume de cada um destes subconjuntos.

Resposta: Podemos assumir sem perda de generalidade que o centro da bola é a origem e que o plano é o plano $z = d$. Em coordenadas cilíndricas, o volume do subconjunto da bola acima do plano é então dado por

$$\begin{aligned} V_+(d) &= \int_0^{2\pi} \int_d^R \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi = \pi \int_d^R \left(R^2 - z^2 \right) dz \\ &= \pi \left(R^2 (R - d) - \frac{R^3}{3} + \frac{d^3}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3R^2 d + d^3 \right). \end{aligned}$$

Note-se que, como seria de esperar, $V_+(R) = 0$ e $V_+(0) = \frac{2}{3}\pi R^3$. O volume do subconjunto da bola abaixo do plano será então

$$V_-(d) = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_+(d) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 + 3R^2 d - d^3 \right).$$

Como seria de esperar, $V_-(d) = V_+(-d)$.

[3,0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua na origem e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = x f(x,y)$. Mostre que g é diferenciável na origem e calcule a sua derivada.

Resposta: As derivadas parciais de g na origem são

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x f(x,0)}{x} = f(0,0)$$

(uma vez que f é contínua na origem) e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0\ .$$

Logo, g é diferenciável na origem se e só se o seguinte limite existir e for igual a 0:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - Dg(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xf(x,y) - \begin{bmatrix} f(0,0) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\left(f(x,y) - f(0,0)\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\left|\frac{x\left(f(x,y) - f(0,0)\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,|f(x,y) - f(0,0)| \leq |f(x,y) - f(0,0)|$$

e f é contínua na origem, o limite é de facto zero, e portanto g é diferenciável na origem.