Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 13 de Abril de 2019 - 11:00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Indique os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a função g é contínua.

[2,0] b) Calcule $D_{\boldsymbol{v}} g(0,0)$ para um vector arbitrário $\boldsymbol{v} = (p,q)$.

[1,0] c) Indique em que pontos de $\mathbb{R}^2$ a função g é diferenciável.

[2,0] d) Verifique se a função $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ é contínua no ponto $(0,0)$.

[2,0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que $Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Seja ainda $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por $G(x,y,z) = (xe^y, xe^{-y}, z^2)$. Calcule a derivada de $f \circ G$ no ponto $(1,0,1)$.

[2,0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $h(x,y) = y^2 - 5xy + 10y$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, 0 < x < 1 \, , \, -1 < y < 1 \, , \, 0 < z < 1 \, , \, x^2 + y^2 > 1\} \, ,$$

e seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Escreva uma expressão para $\int_A f$ em termos de integrais iterados da forma:

[2,0] (a) $\int(\int(\int f(x,y,z)dx)dy)dz$;

[2,0] (b) $\int(\int(\int f(x,y,z)dz)dy)dx$.

[2,0] 5. Calcule o volume do sólido que se obtém se retirarmos a uma bola em $\mathbb{R}^3$ de diâmetro $D > 0$ todos os pontos de um cilindro de diâmetro $d < D$ cujo eixo passa pelo centro da bola.

[3,0] 6. Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existe para qualquer $j = 1, \ldots, n$. Diga, justificando, se é verdadeira a afirmação "g é diferenciável em $\boldsymbol{a}$ se e só se $D_{\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{a}) = Dg(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}$ para qualquer $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$."

[Sugestão: considere uma função que em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ seja definida pela expressão $\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}$.]