Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 13 de Abril de 2019 - 11:00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Indique os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a função f é contínua.

Resposta: A função definida pela expressão $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ é um quociente de polinómios e por isso é contínua em todos os pontos do seu domínio. Portanto a função composta $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$ também é contínua nesses pontos, uma vez que sen é contínua. Por fim, as desigualdades seguintes mostram que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0$$

e que portanto f também é contínua em $(0,0)$:

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) - 0\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y| \leq ||(x,y)|| \ .$$

[2,0] b) Calcule $D_{\boldsymbol{v}}f(0,0)$ para um vector arbitrário $\boldsymbol{v} = (a,b)$.

Resposta: Se $\boldsymbol{v} \neq (0,0)$ a função $f((0,0)+t\boldsymbol{v}) = f(at,bt)$ é dada por

$$f(at,bt) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{(at)^2bt}{(at)^2+(bt)^2}\right) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

e portanto para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos

$$f(at,bt) = \operatorname{sen}\left(\frac{a^2bt}{a^2+b^2}\right) \ .$$

Logo,

$$D_{\boldsymbol{v}}f(0,0) = \frac{d}{dt}f((0,0)+t\boldsymbol{v})\Big|_{t=0} = \left[\cos\left(\frac{a^2bt}{a^2+b^2}\right)\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right]\Big|_{t=0} = \frac{a^2b}{a^2+b^2} \ .$$

Se $\boldsymbol{v} = (0,0)$ então $f((0,0)+t\boldsymbol{v}) = f(0,0) = 0$, pelo que $D_{\boldsymbol{v}}f(0,0) = 0$.

[1,0] c) Indique em que pontos de $\mathbb{R}^2$ a função f é diferenciável.

Resposta: A função definida pela expressão $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ é um quociente de polinómios e por isso é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Portanto a função composta $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$ também é diferenciável nesses pontos, uma vez que sen é diferenciável. Se no ponto $(0,0)$ f fosse diferenciável ter-se-ia de ter, para qualquer $\boldsymbol{v}=(a,b)$,

$$D_{\boldsymbol{v}}f(0,0)=Df(0,0)\boldsymbol{v}$$

e portanto $D_{\boldsymbol{v}}f(0,0)$ teria de ser uma expressão linear em a e b, ao contrário do que se viu na alínea anterior. Logo, o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

[2,0] d) Verifique se a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no ponto $(0,0)$.

Resposta: Nos pontos $(x,y)\neq(0,0)$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Portanto para quaisquer $x\neq 0$ e $y\neq 0$ temos $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$, pelo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ não pode ser uma função contínua no ponto $(0,0)$.

[2,0] 2. Seja $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que $Dg(0,2,1)=\begin{bmatrix}5&3&2\\2&1&0\end{bmatrix}$. Seja ainda $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a função definida por $F(x,y,z)=(x\cos y,x\operatorname{sen}y,z)$. Calcule a derivada de $g\circ F$ no ponto $(2,\pi/2,1)$.

Resposta: A matriz Jacobiana de F num ponto arbitrário $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ é

$$DF=\begin{bmatrix}\cos y&-x\operatorname{sen}y&0\\\operatorname{sen}y&x\cos y&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

e portanto

$$DF(2,\pi/2,1)=\begin{bmatrix}0&-2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}D(g\circ F)(2,\pi/2,1)&=Dg(F(2,\pi/2,1))DF(2,\pi/2,1)=Dg(0,2,1)DF(2,\pi/2,1)\\&=\begin{bmatrix}5&3&2\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-10&2\\1&-4&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

[2,0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y)=x^2+2xy-2x$.

Resposta: A matriz Jacobiana de f é

$$Df=\begin{bmatrix}2x+2y-2&2x\end{bmatrix}$$

e por isso o único ponto crítico é $(0,1)$, que é a solução do sistema

$$\begin{cases}2x+2y-2=0\\2x=0\end{cases}$$

A matriz Hessiana num ponto arbitrário $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$D^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e por isso $\det D^2 f(0,1) = -4$. Como o determinante é o produto dos valores próprios, conclui-se que estes têm sinais opostos. Logo, $D^2 f(0,1)$ é uma matriz indefinida e por isso $(0,1)$ é um ponto de sela.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; -1 < x < 1 \;,\; 0 < y < 1 \;,\; 0 < z < 1 \;,\; x^2 + y^2 > 1\} \;,$$

e seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Escreva uma expressão para $\int_A f$ em termos de integrais iterados da forma:

[2,0] (a) $\int(\int(\int f(x, y, z)\, dz) dy) dx$;

Resposta: $\displaystyle \int_A f = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{1} \left(\int_0^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.

[2,0] (b) $\int(\int(\int f(x, y, z) dx) dy) dz$.

Resposta: $\displaystyle \int_A f = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z)\, dx + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dx \right) dy \right) dz$.

[2,0] 5. Calcule o volume da intersecção de uma bola de raio $R > 0$ em $\mathbb{R}^3$ com um cilindro de raio $r < R$ cujo eixo passa pelo centro da bola.

Resposta: Podemos assumir sem perda de generalidade que o centro da bola é a origem e que o eixo do cilindro é o eixo dos zz. Em coordenadas cilíndricas, o volume da intersecção é então dado por

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi = 2\pi \int_0^r 2\rho\sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho \\ &= 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=r} = \frac{4\pi}{3} \left[R^3 - \left(R^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] \;. \end{aligned}$$

Note-se que, como seria de esperar, $V(0) = 0$ e $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

[3,0] 6. Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existe para qualquer $j = 1, \ldots, n$. Diga, justificando, se é verdadeira a afirmação "g é diferenciável em $\boldsymbol{a}$ se e só se $D_{\boldsymbol{v}} g(\boldsymbol{a}) = Dg(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}$ para qualquer $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$."

[Sugestão: considere uma função que em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ seja definida pela expressão $\dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$.]

Resposta: Seja então $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Trata-se de uma função contínua, pois

$$\left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^2}} \frac{|y|}{\sqrt{x^4 + y^2}} |x| \leq \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{x^4 + y^2}} \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^4 + y^2}} |x| \leq |x|$$

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0 \ .$$

É também claro que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{g(0,y)-g(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0 \ .$$

Por outro lado,

$$D_{(a,b)}g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(ta,tb)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^3bt}{a^4t^2+b^2} = 0$$

para qualquer vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, onde os casos $b=0$ e $b \neq 0$ devem ser considerados separadamente. Deste modo, a função g satisfaz todas as condições da afirmação acima. No entanto, g não é diferenciável, uma vez que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

não pode existir e ser zero:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x,x^2)}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^5}{(x^4+x^4)\sqrt{x^2+x^4}} = \frac{1}{2} \ .$$