

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 13 de Abril de 2013 - 11h00

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^3x}{x^4 + 3y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad g(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}.$$

(2 val.) a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

(1 val.) b) Fazendo $h = f + g$, calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0)$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = f(y^3 - x^3, x^3 - y^3)$ onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(1, -1) = (0, 3)$.

(2 val.) a) Calcule $Dg(0, 1)$.

(1 val.) b) Mostre que $y^2 \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + x^2 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = yx^2 - y^2 - x^2 + 3.$$

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 1 + x + y ; 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 ; z > 1\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dy) dx) dz$.

(2 val.) b) Calcule $\int_X f$, em que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x, y, z) = x$, usando um único integral triplo.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + z^2} < y < 2 - x^2 - z^2 ; z > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq \|x\|^2$. Mostre que f é diferenciável na origem e calcule a derivada $Df(0)$.