

**Cálculo Diferencial e Integral II**  
Teste 1 (versão 2) - 13 de Abril de 2013 - 09h00  
Duração: 90 minutos

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{2x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Determine o conjunto de pontos em que a função  $f$  é contínua.

(1 val.) b) Calcule a derivada de  $f$  na origem segundo o vector  $v = (1, -1)$ .

2. Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $g(x, y) = f(x^3 + y^2)$ , onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável tal que  $f'(1) = 3$ .

(2 val.) a) Calcule  $Dg(0, 1)$ .

(1 val.) b) Mostre que  $2y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = 3y^2 + x^2 - 2y^3x.$$

4. Considere o conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 3; 0 < x < 1; 0 < y < 1; z > 1\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de  $X$  em termos de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int f dy) dx) dz$ .

(2 val.) b) Calcule  $\int_X f$ , em que  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $f(x, y, z) = y$ , usando um único integral triplo.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x < 2 - \sqrt{y^2 + z^2}; z > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $|f(x, y)| \leq |xy|$ . Mostre que  $f$  é diferenciável na origem e calcule a derivada  $Df(0, 0)$ .