

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 12 de Novembro de 2016 - 8h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(2 val.) (b) Calcule, ou mostre que não existe, a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

(2 val.)

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\phi(x) = f(x^2, x^3)$.

(2 val.) (a) Sabendo que $\nabla f(1, 1) = (2, 3)$, determine $\phi'(1)$.

(1 val.) (b) Calcule $\phi''(x)$ em termos das derivadas parciais de f .

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x, y) = x^3 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < 1; y + z^2 < 1; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplas iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando um só integral triplo iterado.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1; \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2; x > 0; y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se existir um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ limitado por uma curva fechada C e tal que C é conjunto de nível de f , então f tem pelo menos um extremo local.