

## Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 12 de Novembro de 2016 - 8h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST

### Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2 + x^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

(2 val.) (b) Calcule, se existir,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

2. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  e seja  $\phi(x, y) = f(x^3 + y^2, x + y)$ .

(2 val.) (a) Sabendo que  $\nabla f(1, 1) = (2, 3)$ , determine  $\nabla \phi(1, 0)$ .

(1 val.) (b) Determine  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por  $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^3$ .

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < 1; y^2 + z < 1; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de  $A$  usando integrais triplas iterados da forma  $\int(\int(\int dy)dz)dx$ .

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de  $A$  usando um só integral triplo iterado.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1; z + \sqrt{x^2 + y^2} < 2; y > 0; z > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Mostre que se existir um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  limitado por uma curva fechada  $C$  e tal que  $C$  é conjunto de nível de  $f$ , então  $f$  tem pelo menos um extremo local.