

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 12 de Novembro de 2016 - 10h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\phi(x, y) = f(x^2 + y, y^2 + x)$.

(2 val.) (a) Sabendo que $\nabla f(2, 2) = (1, 5)$, calcule $\nabla \phi(1, 1)$.

(1 val.) (b) Determine $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ em termos das derivadas parciais de f .

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x, y) = x^2 + xy^2 + y^2$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2; y > x; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplas iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando um só integral triplo iterado.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - x^2 - y^2; y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se f não tem extremos locais então não existe nenhuma curva fechada $C \subset \mathbb{R}^2$, que limite um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e tal que C seja conjunto de nível de f .