Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 11 de Abril de 2015 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, a derivada de $f$ no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(-1,1)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(2,3) = (-1,1)$ e $f$ é diferenciável no ponto $(2,3)$ com matriz Jacobiana

$$Df(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = x + \sin(3(y-1))$.

(2 val.) (a) Calcule $D(g \circ f)(2,3)$.

(1 val.) (b) Sendo $h(x,y) = f(g(x,y), y+2)$ calcule $Dh(2,1)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = 2xy - y^2 - x^2y$.

4. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\ ;\ x^2+y^2 < z < 2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de $V$ em termos de integrais iterados da forma:

(2 val.) a) $\int(\int(\int dz)dx)dy$;

(2 val.) b) $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1 + x^2\ ;\ 0 < x < 1\ ;\ y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Considere o conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ onde $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$ tal que $\int_1^2 f(r) r\, dr = \beta$. Mostre que

$$\int_B h = 2\pi\left(4f(2) - f(1) - 2\beta\right),$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x,y) = \nabla g(x,y) \cdot (x,y)$.