

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 10 de Novembro de 2018 - 9h - v2

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- [2.0] a) Mostre que a função f é contínua na origem.
[2.0] b) Calcule a derivada de f no ponto $(0, 0)$ segundo o vector $(1, -1)$ e mostre que f não é diferenciável nesse ponto.

- [3.0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma função diferenciável e tal que

$$Df(3, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y) = f(y + 1, y + \sin(x))$.

Calcule $Dh(0, 2)$.

- [3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x, y) = x^3 - 2xy + y^2$.

- [2.0] 4. Calcule $\iint_A f$ em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = y$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 1; y > x - 1; y > 0\}$$

usando uma mudança de variáveis adequada.

5. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x < 1; x < z < 2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dz)dx)dy;$

[2.0] b) $\int(\int(\int dx)dy)dz.$

- [2.0] 6. Calcule o volume do conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - x^2 - y^2; y > |x|\}$$

usando coordenadas cilíndricas.

- [3.0] 7. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 tais que

$$F(x, y, g(x, y)) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Para além disso, $g(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0$.

Estabeleça condições suficientes sobre a função F para que $(0, 0)$ seja um ponto de extremo da função g .