Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 10 de Novembro de 2018 - 9h - v1
Duração: 1h30m

Resolução abreviada

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2.0] a) Mostre que a função f é contínua na origem.

Resolução:
Basta notar que $|f(x,y)| \leq |y|$.

[2.0] b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(1,1)$ e mostre que f não é diferenciável nesse ponto.

Resolução:
Seja $v = (1,1)$. Então,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\frac{1}{1+t^2} = \begin{cases} -1, & \text{se}\, t < 0 \\ 1, & \text{se}\, t > 0. \end{cases}$$

Assim, $D_v f(0,0)$ não existe e, portanto a função f não é diferenciável na origem.

[3.0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma função diferenciável e tal que

$$Df(2,3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $h(x,y) = f(x + \operatorname{sen}(y), y+3)$.
Calcule $Dh(2,0)$.

Resolução:
Com $g(x,y) = (x + \operatorname{sen}(y), y+3)$, tem-se

$$Dh(0,2) = Df(2,3)Dg(0,2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$.

Resolução:

Os pontos críticos são as soluções do sistema $\nabla g(x,y) = (0,0)$, isto é,

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Facilmente se conclui que são os pontos $(0,0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.
Para os classificar recorre-se à matriz hesseana

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{bmatrix}.$$

O ponto $(0,0)$ é um ponto de sela porque a matriz

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

tem determinante negativo.
O ponto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é um ponto de mínimo porque a matriz

$$Hf(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem determinante e traço positivos.

[2.0] 4. Calcule $\iint_A f$ em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x,y) = y$ e

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1\,;\, x + y > 1\,;\, y > 0\}$$

usando uma mudança de variáveis adequada.

Resolução:

Fazendo

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

tem-se

$$\iint_A f = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^1 r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{6}.$$

5. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < 1\,;\, x < z < 2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dz)dx)dy$;

Resolução:

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_0^1 \left(\int_0^y \left(\int_x^2 dz \right) dx \right) dy$$

[2.0] b) $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

Resolução:

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_x^1 dy\right) dx\right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_x^1 dy\right) dx\right) dz$$

[2.0] 6. Calcule o volume do conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z < 2-\sqrt{x^2+y^2}\,;\, y > |x|\}$$

usando coordenadas cilíndricas.

Resolução:

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^{2-\rho} \rho\, dz\right) d\rho\right) d\theta = \frac{5\pi}{24}.$$

[3.0] 7. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 tais que

$$F(x,y,g(x,y)) = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Para além disso, $g(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$.

Estabeleça condições suficientes sobre a função F para que $(0,0)$ seja um ponto de extremo da função g.

Resolução:

Dado que, no ponto $(0,0,0)$ para a função F e no ponto $(0,0)$ para a função g, se tem

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2mm] \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

então $(0,0)$ será ponto crítico de g se $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 0$.

Neste caso, tem-se também

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0 \\[2mm] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \\[2mm] \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = 0. \end{cases}$$

Portanto, se $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 0$ e se a matriz

$$-\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\[2mm] \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \end{bmatrix}$$

no ponto $(0,0,0)$, for definida positiva ou definida negativa, o ponto $(0,0)$ será ponto de extremo da função g.