Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

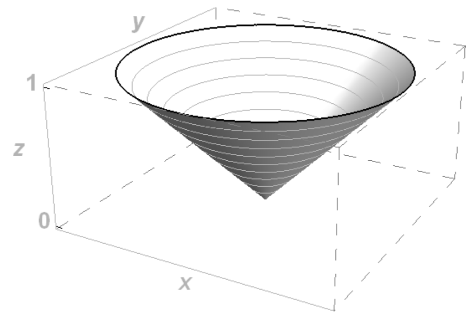
Teste 1 - 09 de Novembro de 2019 - 11h

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

[1.0] 1. Indique qual dos conjuntos está representado na figura:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z < 1\}$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z < 1\}$$
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = z < 1\}$$



[2.0] 2. Calcule ou mostre que o limite seguinte não existe: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{2\pi x^2}{x^2 + y^4}\right)$.

[2.0] 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (xy)^{1/5}$.

Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Será que a função f é diferenciável na origem?

[2.0] 4. Seja $v = (1, 3)$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $D_v g\,(2, 1) = 4$. Seja $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tal que $\gamma(0) = (2, 1)$ e $\gamma'(0) = (1, 3)$. Calcule, justificando, $(g \circ \gamma)'(0)$.

5. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x^2 + y^2 - 4y - 2x - 1$.

[2.0] a) Determine os pontos críticos de h e classifique-os.

[1.0] b) Mostre que h tem um extremo absoluto.

[2.0] 6. Calcule $\iint_A f$ em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = (x - 1)(y - 1)$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 1\,;\, 1 < y < x\}$$

usando uma mudança de variáveis adequada.

7. Considere o conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < x < 1\,;\, y^2 < z < 1\}$. Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma:

[1.0] a) $\int(\int(\int dz)dx)dy$;

[2.0] b) $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

[2.0] 8. Considere o triângulo plano T definido pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$. Calcule o volume do sólido de revolução que resulta da rotação de $180°$ do triângulo T em torno da sua aresta $[(0, 0), (0, 3)]$.

[3.0] 9. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$. Mostre que existem funções $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$, tais que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$, em que $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.