Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 09 de Novembro de 2013 - 08h00
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Determine o conjunto de pontos em que a função g é contínua.

(1 val.) b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

(3 val.) 2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x,y) = f(x+y, x^2+2y)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada de h segundo o vector $v = (3,4)$ na origem, $D_v h(0,0)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{2}{y} + xy^3 - xy.$$

4. Considere o conjunto definido por

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 \; ; \; 0 < y < 1 \; ; \; 0 < z < 2 - x^2 - y^2\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$ e da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(2 val.) b) Calcule a massa de X sabendo que a função densidade de massa é dada por

$$\sigma(x,y,z) = x.$$

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2+z^2} < x < 2 - y^2 - z^2 \; ; \; z > 0\}.$$

(3 val.) 6. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$h_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad h_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se h é diferenciável na origem.