Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 09 de Novembro de 2013 - 10h00

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Mostre que g é contínua na origem.

(1 val.) b) Calcule $D_v g(0,0)$ em que $v = (1,-1)$.

(3 val.) 2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x,y) = f(f(x,y),y)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $f(0,0) = 0$. Calcule $Dh(0,0)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x.$$

4. Considere o conjunto definido por

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \ ; \ y > 0 \ ; \ x + y < 1 \ ; \ 0 < z < 2 - x^2\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de X em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$ e da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(2 val.) b) Calcule o volume de X.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o integral $\displaystyle\int_A \sigma$, sendo

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{1-y^2-z^2} < x < 1 - y^2 - z^2 \ ; \ z > 0\}$$

e $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $\sigma(x,y,z) = x$.

(3 val.) 6. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$h_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad h_2(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se h é diferenciável na origem.