Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 09 de Novembro de 2013 - 10h00
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) a) Mostre que f é contínua na origem.

(1 val.) b) Calcule $D_v f(0,0)$ em que $v = (1,1)$.

(3 val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = f(x, f(x,y))$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $f(0,0) = 0$. Calcule $Dg(0,0)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{y^3}{3} + x^2 y - 4y.$$

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \; ; \; y > 0 \; ; \; x + y < 1 \; ; \; 0 < z < y^2 + 1\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2 val.) b) Calcule o volume de S.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o integral $\displaystyle\int_B \sigma$, sendo

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < y < \sqrt{2 - x^2 - z^2} \; ; \; z > 0\}$$

e $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $\sigma(x,y,z) = 2y$.

(3 val.) 6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se f é diferenciável na origem.