

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 1 (versão 2) - 07 de Novembro de 2015 - 10h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + e^{xy} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

[2.0] (a) Estude a função f do ponto de vista da continuidade.

[1.0] (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$.

[2.0] (c) Calcule a derivada de f segundo o vector $(1, 1)$ no ponto $(0, 0)$.

[2.0] 2. Seja $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(1, 1) = 1$ e $\nabla g(1, 1) = (-2, 2)$. Considere a função h definida por

$$h(x, y) = g(g(y^3, x^3), x^3).$$

Calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1)$.

3. Considere a função $g(x, y, z) = \sin z + e^{x^2 + y^2}$.

[1.0] (a) Determine os pontos de estacionaridade de g .

[1.0] (b) Classifique os pontos determinados na alínea anterior.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < 1; x + z < 1; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

[3.0] (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplas iterados da forma $\int(\int(\int dx)dz)dy$.

[2.0] (b) Calcule o volume de A usando um só integral triplo iterado.

[3.0] 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - x^2 - y^2; y > 0\}.$$

[3.0] 6. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua cujas derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem num ponto (a, b) .

Prove que, se $\frac{\partial f}{\partial y}$ for contínua numa bola centrada em (a, b) , então f é diferenciável nesse ponto.