Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 07 de Novembro de 2015 - 10h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} + e^{xy} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[2.0] (a) Estude a função g do ponto de vista da continuidade.

[1.0] (b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1)$.

[2.0] (c) Calcule a derivada de g segundo o vector $(1,1)$ no ponto $(0,0)$.

[2.0] 2. Seja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(1,1) = 1$ e $\nabla g(1,1) = (-1,1)$. Considere a função h definida por

$$h(x,y) = g(g(x^3,y^3), xy^3).$$

Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1)$.

3. Considere a função $g(x,y,z) = \operatorname{sen} x + e^{y^2+z^2}$.

[1.0] (a) Determine os pontos de estacionaridade de g.

[1.0] (b) Classifique os pontos determinados na alínea anterior.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z<1\,;\ x+z<1\,;\ x>0\,;\ y>0\,;z>0\}.$$

[3.0] (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

[2.0] (b) Calcule o volume de A usando um só integral triplo iterado.

[3.0] 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < z < 2-x^2-y^2\,;\ x>0\,;\ y>0\}.$$

[3.0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujas derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem num ponto (a,b). Prove que, se $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ for contínua numa bola centrada em (a,b), então f é diferenciável nesse ponto.